第35講　総合問題(3)

1　1，2，3，4，5の数字が1つずつ書かれた5枚のカードが横一列に並んでいる．このカードの中から隣り合って置かれている2枚のカードを無作為に選んで入れ替える操作を繰り返す．ただし，最初の状態では数字の小さい順に1，2，3，4，5と並んでいるものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　2回の操作を終えた後のカードの並び方は，全部で何通りありうるか求めよ．

(2)　4回の操作の過程で，数字3が書かれたカードが1回も動かされることがない確率を求めよ．

(3)　4回の操作を終えた後，数字3が書かれたカードが左から3番目にある確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　2 個のサイコロを投げて，xy 平面上の点Ｐを移動させる次の試行を考える．

試行：2 個のサイコロを同時に投げて，大きい目の数を X，小さい目の数を Y とする．ただし，同じ目が出た場合は，X，Y の両者をその目の数とする．このとき

X が 3 以上なら，点Ｐを x 軸の正の方向に 1 動かし，

Y が 3 以上なら，点Ｐをさらに y 軸の正の方向に 1 動かす．

この試行を繰り返して点Ｐを原点 $(0,\ 0)$ から順に動かしていくとき，以下の問いに答えよ．

(1)　1 回目の試行終了後に点Ｐが $(1,\ 0)$ に移動している確率を求めよ．

(2)　2 回目の試行終了後に点Ｐが $(1,\ 1)$ に移動している確率を求めよ．

(3)　n 回目の試行終了後に点Ｐが $(n,\ n-1)$ に移動している確率を求めよ．ただし，n は自然数である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 n を自然数とする．1つの袋に白球が n 個と赤球が2個，合わせて $n+2$ 個の球が入っている．この袋から，$n+1$ 個の球を1個ずつ取り出し，左から1列に順に並べる．

(1) 並べた列に赤球が2個入っている確率を，n を用いて表せ．

(2) 2個の赤球の間にある白球の個数を k とする．ただし，並べた列に赤球が2個入っていない場合は，$k=0$ とする．このとき，k の期待値が1以上となる最小の n の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 35 講　総合問題(3)

赤い本が 2 冊，青い本が n 冊ある．この $n+2$ 冊の本を無作為に 1 冊ずつ，本棚に左から並べていく．2 冊の赤い本の間にある青い本の冊数を X とする．

例えば $n \geqq 3$ のとき，$X=3$ となる場合について考える。このとき，2 冊の赤い本の間に 3 冊の青い本がある．2 冊の赤い本のうち 1 冊目を置く場所は $n-$ [ア] 通りある．

よって，$X=3$ となる確率は $\dfrac{n-[\text{ア}]}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$ である．

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対し，$X=k$ となる確率を $P(X=k)$ とすると，

$P(X=k)=\dfrac{n-k+[\text{イ}]}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$ である．したがって，X の期待値は $\dfrac{n}{[\text{ウ}]}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 35 講　総合問題(3)

1　1，2，3，4，5 の数字が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードが横一列に並んでいる．このカードの中から隣り合って置かれている 2 枚のカードを無作為に選んで入れ替える操作を繰り返す．ただし，最初の状態では数字の小さい順に 1，2，3，4，5 と並んでいるものとする．以下の問いに答えよ．

(1)　2 回の操作を終えた後のカードの並び方は，全部で何通りありうるか求めよ．

(2)　4 回の操作の過程で，数字 3 が書かれたカードが 1 回も動かされることがない確率を求めよ．

(3)　4 回の操作を終えた後，数字 3 が書かれたカードが左から 3 番目にある確率を求めよ．

(1)　2 回の操作に関わるカードが 2 枚だけのとき，操作後の並びは 12345 の 1 通り．

2 回の操作で 3 枚のカードが関わるとき

カードの選び方が 123，234，345 の 3 通り

123 は操作後に 231 または 312 の 2 通りの並びとなる．他も 2 通り．

よって $3\cdot 2=6$（通り）

2 回の操作で 4 枚のカードが関わるとき

操作後の並びは 21435，21354，13254 の 3 通り

以上より　全部で　**10 通り**

(2)　題意を満たすのは　4 回とも 1 と 2，4 と 5 の入れ替えとなるとき．

1 回の操作での入れ替えは　1 と 2，2 と 3，3 と 4，4 と 5 の 4 通り．

よって　1 と 2，4 と 5　を入れ替える確率はともに $\dfrac{1}{4}$

したがって　求める確率は　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)^4=\boldsymbol{\dfrac{1}{16}}$

(3)　1 回の移動において

3 が 1 つ左，1 つ右に移動する確率はともに $\dfrac{1}{4}$

（ただし，それぞれ左端，右端にいるときは確率 0）

3 が移動しない確率は $\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$　（ただし，両端にいるときは確率 $\dfrac{3}{4}$）

4 回の移動で右と左に 1 つずつ移動するときの確率は　$\dfrac{4!}{2!}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{16}$

右 2 つ，左 2 つ移動するときの確率は　$\dfrac{4!}{2!2!}\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{3}{128}$

これと(2)のときを合わせて　$\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{128}+\dfrac{1}{16}=\boldsymbol{\dfrac{35}{128}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 2個のサイコロを投げて，xy平面上の点Pを移動させる次の試行を考える．

試行：2個のサイコロを同時に投げて，大きい目の数をX，小さい目の数をYとする．ただし，同じ目が出た場合は，X，Yの両者をその目の数とする．このとき

Xが3以上なら，点Pをx軸の正の方向に1動かし，

Yが3以上なら，点Pをさらにy軸の正の方向に1動かす．

この試行を繰り返して点Pを原点$(0,\ 0)$から順に動かしていくとき，以下の問いに答えよ．

(1)　1回目の試行終了後に点Pが$(1,\ 0)$に移動している確率を求めよ．

(2)　2回目の試行終了後に点Pが$(1,\ 1)$に移動している確率を求めよ．

(3)　n回目の試行終了後に点Pが$(n,\ n-1)$に移動している確率を求めよ．ただし，nは自然数である．

(1)「大きい目Xが3以上　かつ　小さい目Yが2以下」の余事象は

「Xが2以下　または　Yが3以上」である．

Xが2以下となるのは，2個とも2以下の目が出るときであり，

Yが3以上となるのは，2個とも3以上の目が出るときである．これらは排反．

よってx軸の正の方向に1移動し，y軸方向には移動しない確率は

$$1-\left(\frac{2^2}{6^2}+\frac{4^2}{6^2}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{9}}\quad\cdots\cdots①\qquad\text{これが題意の確率である．}$$

(2)　Yが3以上（このときXも3以上）となるのは，2個とも3以上の目が出るときである．

よってx，y軸の正の方向にともに1つずつ移動する確率は　$\frac{4^2}{6^2}=\frac{4}{9}$　……②

①，②より，点Pが移動しない確率は　$1-\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\right)=\frac{1}{9}$

ゆえに　題意の確率は　$2!\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{8}{81}}$

(3)　x軸の正の方向にのみ1つ移動し，x，yの正の方向にともに1つずつ$n-1$回移動するときで，その確率は　${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{4}{9}\right)^1\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}=\boldsymbol{n\left(\frac{4}{9}\right)^n}$

3 nを自然数とする．1つの袋に白球がn個と赤球が2個，合わせて$n+2$個の球が入っている．この袋から，$n+1$個の球を1個ずつ取り出し，左から1列に順に並べる．

(1)　並べた列に赤球が2個入っている確率を，nを用いて表せ．

(2)　2個の赤球の間にある白球の個数をkとする．ただし，並べた列に赤球が2個入っていない場合は，$k=0$とする．このとき，kの期待値が1以上となる最小のnの値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(1)　$n+2$ 個の球から $n+1$ 個を選ぶ方法は　${}_{n+2}\mathrm{C}_{n+1}={}_{n+2}\mathrm{C}_1=n+2$（通り）

このうち，赤球を2個選ぶ方法は　${}_2\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_{n-1}=n$（通り）

よって求める確率は　$\boldsymbol{\dfrac{n}{n+2}}$

(2)　赤球が選ばれる回に注目する．「$n+2$ 回目」を「選ばれない」のと同じとすると，赤球が選ばれる回の選び方は　${}_{n+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$（通り）

$k=0$ となるのは

(i)　赤球が1つのみ選ばれるとき　　(ii)　赤球が連続して選ばれるとき

(i)のとき　$n+1$ 回中1回選ぶ選び方で　$n+1$ 通り

(ii)のとき　最初の赤球が出る回の選び方で　1回目から n 回目までの n 通り

よって　$2n+1$ 通り

$k=1$ となるのは，赤白赤　と連続して出ているとき

最初の赤球が出る回の選び方で　1回目から $n-1$ 回目の　$n-1$ 通り

$k=2$ となるのは，赤白白赤　と連続して出ているとき

最初の赤球が出る回の選び方で　1回目から $n-2$ 回目の　$n-2$ 通り

同様にして，$1\leqq k\leqq n-1$ のとき　k となるのは　$n-k$ 通りある．

したがって k の期待値は

$$0\times\frac{2(2n+1)}{(n+2)(n+1)}+\sum_{k=1}^{n-1}k\times\frac{2(n-k)}{(n+2)(n+1)}=\frac{2}{(n+2)(n+1)}\times\sum_{k=1}^{n-1}(-k^2+nk)$$

$$=\frac{2}{(n+2)(n+1)}\times\left\{-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+n\times\frac{1}{2}(n-1)n\right\}$$

$$=\frac{n(n-1)}{3(n+2)(n+1)}\{3n-(2n-1)\}=\frac{n(n-1)}{3(n+2)}$$

よって　$\dfrac{n(n-1)}{3(n+2)}\geqq1$ より　$n^2-n\geqq3n+6$　　$n^2-4n-6\geqq0$

$n\leqq2-\sqrt{10}$，$2+\sqrt{10}\leqq n$

したがって　求める n の最小値は　$\boldsymbol{n=6}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第35講　総合問題(3)

赤い本が2冊，青い本がn冊ある．この$n+2$冊の本を無作為に1冊ずつ，本棚に左から並べていく．2冊の赤い本の間にある青い本の冊数をXとする．
例えば$n \geqq 3$のとき，$X=3$となる場合について考える。このとき，2冊の赤い本の間に3冊の青い本がある．2冊の赤い本のうち1冊目を置く場所は　$n-$ ア 通りある．

よって，$X=3$となる確率は　$\dfrac{n-\text{ア}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$ である．

$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$に対し，$X=k$となる確率を$P(X=k)$とすると，

$P(X=k)=\dfrac{n-k+\text{イ}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$　である．したがって，Xの期待値は　$\dfrac{n}{\text{ウ}}$ である．

$n \geqq 3$で，$X=3$のとき　$n+2$冊の本の列の中に　赤青青青赤　の列が存在する．2冊の赤い本のうち1冊目を置く場所は　左から1番目から$n-2$番目までの　$n-\mathbf{2}$通りある．

よって，$X=3$となる確率は　$\dfrac{n-2}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$　である．

$X=k$となるとき，1冊目の本を置く場所は左から1番目から$n-k+1$番目までの$n-k+1$通りある．よって　$P(X=k)=\dfrac{n-k+\mathbf{1}}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}$　である．

したがって，Xの期待値は

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k \times P(X=k) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} k(n-k+1) \\
&= \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} \sum_{k=0}^{n} \{-k^2+(n+1)k\} \\
&= \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} \cdot \left\{-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\} \\
&= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)] \\
&= \frac{n}{\mathbf{3}}
\end{aligned}
$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。